به نام خدا

دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران

آزمون پایان ترم درس توپولوژی عمومی

مدرس: سلیمی مقدّم   دوشنبه ۳ بهمن ماه ۱۳۸۴   وقت: ۳ ساعت

---

۱) (۱/۷۵ نمره)
(الف) هر یک از مفاهیم زیر را تعریف کنید.
(a) فضای لیندلوف (b) فشردگی (c) دومین اصل شمارایی (d) فضای منتظم
(ب) مفهومِ ناهمبندی را تعریف کرده و نشان دهید فضای توپولوژیک X ناهمبند است اگر و تنها اگر نگاشت پیوسته‌ای از X به فضای توپولوژیکِ دو عضویِ $\{0,1\}$ با توپولوژی گسسته موجود باشد.

۲) (۱/۲۵ نمره)(قضیه)
(الف) اگر مجموعه‌های C و D تشکیلِ جداسازی‌ای برای X بدهند و Y زیرمجموعهٔ همبندی از X باشد آنگاه Y تماماً یا در D و یا در C واقع است.
(ب) اجتماع گردایه‌ای از مجموعه‌های همبند که یک نقطهٔ مشترک دارند، همبند است.
(ج) فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای همبند از X باشد. اگر $A \subset B \subset \overline{A}$ آنگاه B نیز همبند است.

۳) (۱/۵ نمره)(قضیه) کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است.(گزارهٔ درست را اثبات کرده و برای گزارهٔ نادرست مثال نقض بیاورید.)
(الف) هر زیرمجموعهٔ بسته از یک فضای فشرده فضایی است فشرده.
(ب) هر زیرمجموعهٔ فشرده از یک فضای توپولوژیک، مجموعه‌ای است بسته.
(ج) هر زیرمجموعهٔ فشرده از یک فضای متریک، مجموعه‌ای است بسته.

۴) (۱/۵ نمره) فرض کنید $Y = \{(0,y) \in R^2 | -1 \leq y \leq 1\}$ و $Z = \{(x, \sin(\frac{\pi}{x})) \in R^2 | 0 < x \leq 1\}$ دو زیرمجموعهٔ R^2 باشند. نشان دهید فضای توپولوژیک $X = Y \cup Z$ با توپولوژی زیرفضایی القائی از R^2 همبند است امّا همبند راهی نمی‌باشد.

۵) (۱/۵ نمره) فرض کنید X فضایی متری پذیر باشد.
(الف) ثابت کنید که اگر X زیرمجموعهٔ چگال شمارایی داشته باشد آنگاه X پایه‌ای

شمارا دارد.

(ب) ثابت کنید که اگر X لیندلوف باشد آنگاه پایه‌ای شمارا دارد.

۶) (۱/۵ نمره) فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل (به عبارت دیگر هر دنبالهٔ کوشی در X، همگراست.) و $f : X \longrightarrow X$ یک تابع باشد طوریکه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(f(x), f(y)) \leq \frac{۱}{۲} d(x,y)$. نشان دهید f دقیقاً یک نقطهٔ ثابت دارد.

۷) (۱ نمره) فرض کنید مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای حقیقی $k \times k$ را با M_k نمایش دهیم. در این صورت تناظر دوسویی زیر را بین M_k و $R^{k^۲}$ خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k۱} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \longrightarrow (a_{۱۱}, \cdots, a_{۱k}, a_{۲۱}, \cdots, a_{۲k}, \cdots, a_{k۱}, \cdots, a_{kk})$$

اینک M_k را با توپولوژی القائی از $R^{k^۲}$، که توسط نگاشت فوق القاء می‌شود، در نظر می‌گیریم. زیرمجموعهٔ $\mathcal{B} := \{A \in M_k | AA^t = I_k, \det A = ۱\}$ از M_k که در آن I_k ماتریس همانی است را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید $\mathcal{B}$ در M_k، با توپولوژی القائی از $R^{k^۲}$ بصورت فوق، فشرده است.

«موفق باشید»